XXII Suites et séries de fonctions + théorèmes de Lebesgue

XXII.A Questions de cours :

1. Convergence uniforme implique convergence simple
2. Convergence normale entraîne convergence absolue en tout point
3. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues

XXII.B Exercices suites et séries de fonctions :

Exercice 1: * Exemple d'une suite de fonctions convergeant uniformément

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n(1+x)}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2: ** Suites de polynômes

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice 3: ** Limite uniforme d'une suite de polynômes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exercice 4: ** Dérivabilité d'une somme d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 5: **** Fonction ζ de Riemann

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Prouver que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
4. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

Exercice 6: *** Quelques propriétés d'une somme d'une série de fonctions

Soit f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. f est-elle dérivable en a ?

Exercice 7: ** Régularité d'une somme de série 1

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ où u_n est l'application

$$u_n \left\{ \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1, +\infty[$.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8: * Un grand classique (CCP)

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 9: ** Exemple d'une série de fonctions alternées

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Exercice 10: ** Convergence uniforme sous condition

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 11: * Régularité d'une somme de série 2**

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où u_n est l'application

$$u_n \left\{ \begin{array}{cccc}]1, +\infty[& \times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & , \quad y & \mapsto & \frac{1}{n^x \ln(n)^y} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

XXII.C Exercices théorèmes de Lebesgue :

Exercice 12: ** Régularité de la fonction Γ**

On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad \text{pour x} > 0.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 13: * Transformée de Fourier de la Gaussienne**

On définit la Gaussienne par la fonction g suivante :

$$g(x) = e^{-ax^2}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.
Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x$.

(*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par f.*)

Exercice 14: * Convergence dominée 1

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\, dx$.

Exercice 15: *** Fonction Γ et sa formule de Gauss

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

   On admettra que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ si on n'a pas encore vu le cours de convexité.

Exercice 16: * Convergence dominée 2

Soit la suite de fonction dénie de la manière suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 17: ** Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 18: *** Première application usuelle de Riemann-Lebesgue

1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 19: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\, dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\, dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.